

# Lojistik Fonksiyonunun Sahada Programlanabilir Analog Diziler Kullanılarak Gerçeklenmesi

## Field Programmable Analog Array Implementation of Logistic Map

İhsan Çiçek<sup>1,2</sup>, Ali Emre Pusane<sup>2</sup>, Günhan Dündar<sup>2</sup>

<sup>1</sup>TÜBİTAK BİLGEM UEKAE, Kocaeli

<sup>2</sup>Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü,  
Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul

Email: ihsanccicek@uekae.tubitak.gov.tr, ali.pusane@boun.edu.tr, dundar@boun.edu.tr

**Özetçe** —Tek boyutlu kaotik bir fonksiyon olan lojistik denkleminin doğrusal olmayan dinamiği, istatistiksel ve spektral özellikleri MATLAB ortamında gerçekleştirilen sayısal benzetimler yardımıyla incelenmiştir. Lojistik denklemi için analog davranışsal bir model geliştirilmiş ve denklem ayrık zamanlı çalışan sahada programlanabilir analog dizi tümdevresi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan ölçümlerle tasarlanan devrenin kaotik davranış sergilediği gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçlar sahada programlanabilir analog dizilerin ayrık zamanlı kaotik sistemlerin incelenmesinde ve kaotik işaret üretiminde kullanılabileceğini göstermiştir.

**Anahtar Kelimeler**—Lojistik fonksiyon, Sahada programlanabilir analog diziler, Ayrık zamanlı kaos.

**Abstract**—The non-linear dynamics of the chaotic 1D logistic map and its statistical and spectral properties are studied using MATLAB numerical simulations. We have developed an analog behavioral model and implemented logistic map on a field programmable analog array chip. Presented measurement results confirmed the chaotic behavior of the implemented system. Results show that field programmable analog arrays can be used to implement discrete time 1D maps for chaotic signal generation.

**Keywords**—Logistic function, Field programmable analog arrays, Discrete time chaos.

## I. GİRİŞ

Kaos, dinamik sistemlerin kontrol parametrelerinin almış oldukları değerlere göre sergilediği düzensiz ve karmaşık bir davranış şekli olarak tanımlanabilir. Kaotik bir sistem iki temel özelliğiyle diğer dinamik sistemlerden ayrılır. Bunlardan ilki başlangıç koşullarına hassas bağımlılıktır. Birbirine çok yakın iki ilk koşuldan başlayarak zamanda evrilen birbirinin aynı iki kaotik sistemin ürettiği yörüngelerin birbirinden saparak zamanda evrildiği gözlenebilir. Kaotik bir sistemde başlangıç koşullarındaki en küçük bir hata, zamanda evrilen sistemde çok büyük sapmalara neden olabilir. Pozitif *Lyapunov* üsteliyle karakterize edilen bu iraksak davranış şekli nedeniyle doğrusal sistemlerin aksine, kaotik bir sistemin davranışı hakkında uzun

vadeli doğru tahminler yapmak mümkün değildir. Kaotik sistemlerin ikinci özelliği ise aperiyo diktir. Zamanda evrilirken üretilen yörünge periyodik olmamaktadır. Bu nedenle dinamik sistemin durum değişkenlerine göre faz portresi oluşturulduğunda, gözlemci, endomorfik durum uzayında bir geçtiği noktadan bir daha geçmeyen yörüngelerin oluşturduğu bir sarmal görüntüsüyle karşılaşır.

Kaotik sistemleri sistem dinamiğinin çalışma şekline göre sürekli zaman ve ayrık zaman olarak ikiye ayırmak mümkündür. Sürekli zaman kaotik sistemlerde sistemin evrimi durum değişkenlerinin birim zamandaki değişim oranına bağlıyken, ayrık zamanlı kaotik sistemlerde durum değişkenlerinin değerlerine bağlıdır. Ergodik teoriye göre kaotik sistemler başlangıç koşullarına hassas bağımlılık gösterebilir de uzun vadeli istatistiksel özellikleri başlangıç koşullarından bağımsızdır [1]. Elektronik olarak gerçekleştirilebilen kaotik sistemler geniş bantlı gürültü kaynağı [2], düşük elektromanyetik ışınlı saat üreteçleri [3], haberleşme sistemleri [4] ve kriptoloji [5], [6] gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada basit bir matematiksel ifadeye sahip olmasına rağmen kontrol parametresinin değerine bağlı olarak çok zengin dinamik davranış sergileyebilen lojistik fonksiyonunun istatistiksel ve spektral özellikleri MATLAB ortamında gerçekleştirilen sayısal benzetimler yardımıyla incelenmiştir. Geliştirilen analog davranışsal model temel alınarak lojistik fonksiyonu ayrık zamanlı çalışan bir sahada programlanabilir analog dizi (SPAD) tümdevresi üzerinde gerçekleştirilmiş ve tasarlanan devrenin kaotik rejimde çalıştığı yapılan ölçümlerle doğrulanmıştır.

## II. LOJİSTİK FONKSİYONU VE DİNAMİK ÖZELLİKLERİ

Lojistik fonksiyonu literatüre ilk olarak 1838'de P. F. Verhulst tarafından biyolojik popülasyonların nüfus dinamiğini modelleme amacıyla sunuldu [7]. 1976'da May, bu basit denklemin çok karmaşık davranışlar sergileyebildiğini gösterdi [8]. Matematiksel basitliği ve sergileyebildiği dinamik davranış zenginliği sebebiyle kaos teorisinde en çok çalışılan denklemlerden biri olan ayrık zamanlı lojistik fonksiyonu,

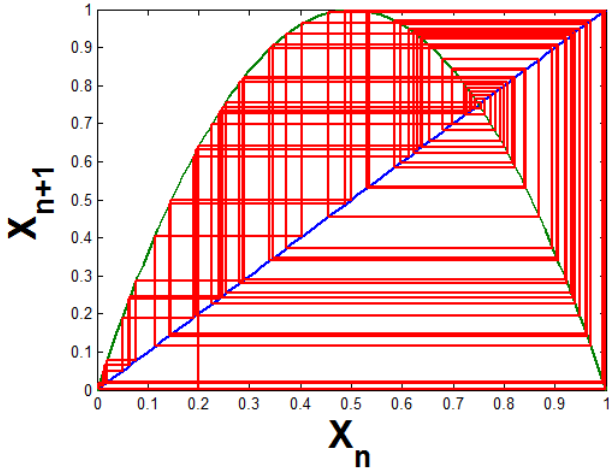
Bu çalışmayı destekleyen TÜBİTAK BİLGEM'e teşekkür ederiz.

$$x(n+1) = Rx(n)(1-x(n)) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmıştır.  $R$  lojistik denkleminin dinamik davranışını kontrol eden parametredir. Lojistik denklemi zamanda bir  $x(0)$  ilk değerinden başlayıp Şekil 1’de gösterildiği gibi ayrık adımlarla evrilerek matematiksel olarak

$$Y_n = \{x(0), x(x(0)), \dots, x^n(x(0))\} \quad (2)$$

şeklinde tanımlanabilecek bir yörünge çizer. Şekil 1’de lojistik denkleminin ayrık zaman adımlarıyla ürettiği kaotik yörünge gösterilmiştir.  $R$  parametresinin aldığı değerlere göre lojistik denklemi değişik dinamik davranışlar sergileyebilir.

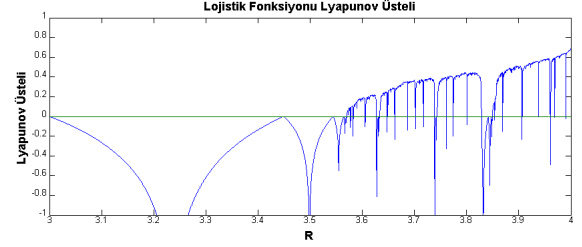
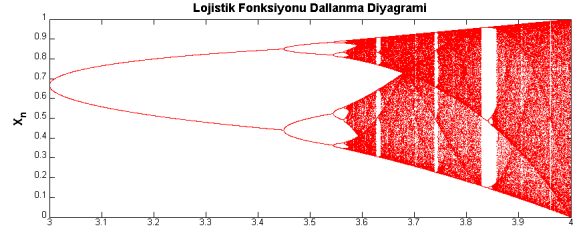


Şekil 1. Lojistik fonksiyonu ve zamandaki evrimiyle ortaya çıkan faz portresi.

Lojistik fonksiyonunun kontrol parametresine göre davranışı Şekil 2’deki dallanma grafiğinde gösterilmiştir.  $R = 3.57$  değerinden sonra kaotik rejime geçildiği gözlenmektedir. Şekil 2’teki dallanma diyagramına paralel çizdirilmiş olan *Lyapunov* üstelinin sistemin kaotik olduğu bölgelerde pozitif değer aldığı gözlenebilir. *Lyapunov* üstelinin pozitif olması dinamik sistemin kaotik rejimde çalıştığının en belirgin göstergesidir ve lojistik denklemi için en yüksek değerini ( $\lambda = 0.6931$ )  $R = 4$ ’te almaktadır. Kaotik sistemin üreteceği entropinin *Lyapunov* üsteliyle orantılı olduğu gözönüne alınırsa sistemin en kaotik davranacağı noktanın *Lyapunov* üstelinin en büyük değerine denk gelen  $R = 4$ ’te olacağı anlaşılır.

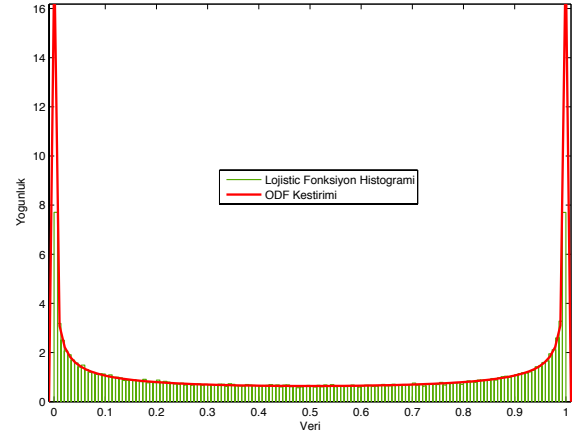
### III. LOJİSTİK FONKSİYONUNUN İSTATİSTİKSEL ANALİZİ

Kaotik sistemlerin uzun vadeli istatistiksel özellikleri başlangıç koşullarından bağımsızdır [1]. Lojistik fonksiyonunun altında yatan olasılık dağılım fonksiyonunu belirlemek amacıyla MATLAB ortamında çalıştırılan lojistik denklem modeli, rastasal seçilen bir ilk durumdan başlayarak  $10^5$  adım çalıştırılmıştır. Kaotik yörüngeyi oluşturan zaman serisine



Şekil 2. Lojistik fonksiyonunun dallanma ve *Lyapunov* üsteli grafiği.

ait verinin normalize histogramından yola çıkılarak deneysel olasılık dağılımı Şekil 3’teki gibi elde edilmiştir.



Şekil 3.  $R = 4$  için olasılık yoğunluk fonksiyonu kestirimi.

Dağılımın beta dağılımına olan benzerliği nedeniyle en büyük olabilirlik kestirim yöntemiyle dağılıma ait şekil parametreleri  $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ , olarak elde edilmiştir. Şekil ve değer kümesi parametreleri  $p = 0, q = 1$ ,

$$f_x(x) = \frac{(x-p)^{\alpha-1}(q-x)^{\beta-1}}{(q-p)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}, \quad (3)$$

$$x \in [p, q], \quad \alpha, \beta > 0$$

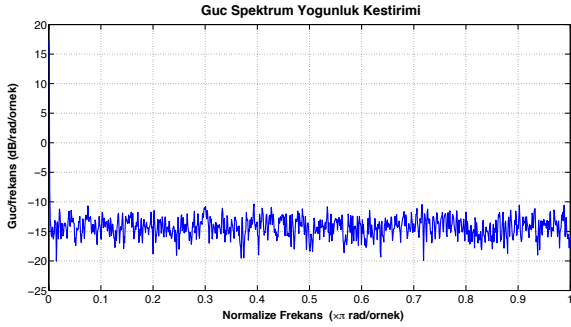
biçiminde verilen genel beta olasılık dağılım fonksiyonuna yerleştirilerek analitik olasılık dağılım fonksiyonu,

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (4)$$

olarak hesaplanmıştır.

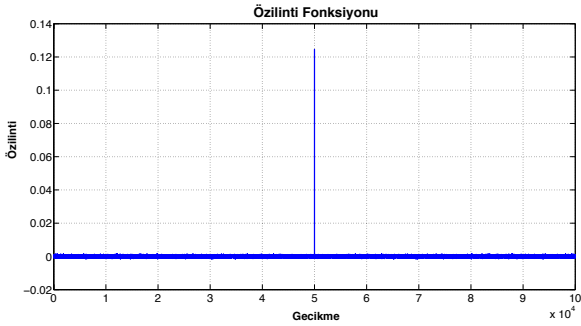
#### IV. LOJİSTİK FONKSİYONUNUN SPEKTRAL ANALİZİ

Karmaşık bir işaret içinde periyodik bileşen olup olmadığını kontrol etmek için spektral analiz yöntemleri kullanılabilir. Kaotik sistemin aperiodyk çalıştığını doğrulamak için lojistik denkleminin spektral özellikleri incelenmiştir. Denklem  $R = 4$  için  $10^5$  adımlanmasıyla üretilen zaman serisine Welch yöntemi uygulanarak elde edilen spektral güç yoğunluk kestirimi Şekil 4'deki gibi hesaplanmıştır. Üretilen zaman serisi içinde periyodik bir bileşen bulunmadığı spektrumun düzlüğünden anlaşılmaktadır. Birim frekansa düşen işaret enerjisi eş dağılımlıdır.



Şekil 4.  $R = 4$  için hesaplanan güç spektrum yoğunluk kestirimi.

Üretilen zaman serisinin özilinti fonksiyonu Şekil 5'te gösterildiği gibi hesaplanmıştır. Özilinti fonksiyonu da üretilen zaman serisi içinde periyodik bir işaret olmadığını doğrulamaktadır.



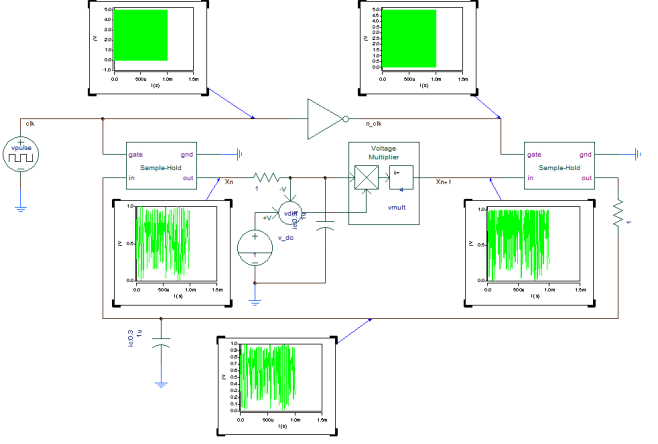
Şekil 5.  $R = 4$  için hesaplanan özilinti fonksiyonu.

Yapılan hesaplamalara göre, lojistik denkleminin  $R = 4$  için ürettiği zaman serisi spektral olarak beyaz gürültüye benzer özellikler sergilemektedir.

#### V. LOJİSTİK DENKLEMİNİN GERÇEKLENMESİ

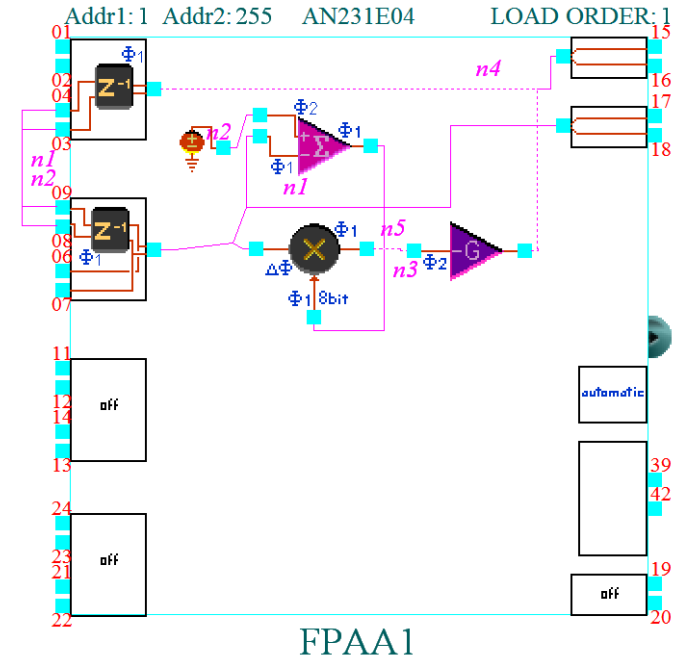
Ayrık zamanlı kaotik sistemin gerçekleştirilmesi için transfer fonksiyonu, ilgili denklemleri gerçekleyen bir devre bloğu ile, zamanda gecikme yaratan bir devre bloğuna ihtiyaç vardır. Monolitik tümdevre gerçeklemelerinde denklem yapısına göre anahtarlamalı akım (AA) [9] ya da anahtarlamalı kapasitör (AK) [10] devreleri kullanılabilir. Analog devre prototiplemede monolitik gerçeklemeye alternatif bir platform da

SPAD devreleridir. Anadigim tarafından üretilen AN231E04 tümdevresi AK tabanlı bir SPAD devresidir [11] ve lojistik denkleminin gerçekleştirilmesi için gereken referans gerilim üretici, çarpma, çıkarma, kazanç ve örnekleme-tutma bileşenlerine sahiptir. Lojistik denkleminin gerçekleştirilmesi için Şekil 6'da gösterilen analog davranışsal benzetim modeli geliştirilmiştir.



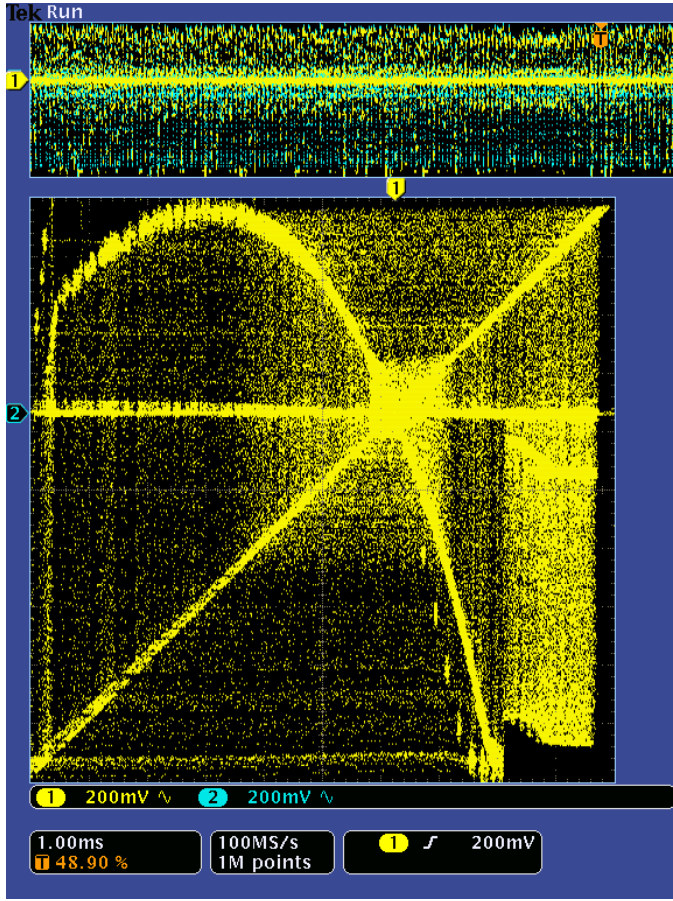
Şekil 6. Lojistik denkleminin analog davranışsal modeli.

Geliştirilen analog davranışsal model temel alınarak AN231E04'ün tasarım ortamında Şekil 7'de gösterildiği gibi lojistik denklemi gerçekleştirilmiştir.



Şekil 7. Lojistik denkleminin SPAD gerçekleştirilmesi.

Ayrık zamanlı SPAD üzerinde gerçekleştirilen lojistik denkleminin ölçüm sonuçları Şekil 8'de verilmiştir. Durum değişkeni  $x(n+1)$ 'i  $x(n)$ 'e göre osiloskop yardımıyla ölçülmesiyle elde edilen faz portresi tasarlanan devrenin kaotik rejimde çalıştığını göstermektedir.



Şekil 8. Lojistik denkleminin SPAD gerçekleştirilmesinden alınan faz portresi ölçümü.

## VI. SONUÇLAR

Lojistik fonksiyonunun doğrusal olmayan dinamiğini ve ilgili istatistiksel ve spektral özelliklerini incelemek amacıyla MATLAB ortamında sayısal benzetimler yapılmıştır. Olasılık dağılım fonksiyonu  $Beta(0.5, 0.5)$  olarak hesaplanan lojistik denkleminin ürettiği zaman serisinin spektral olarak ilintisiz beyaz gürültü gibi davrandığı yapılan sayısal benzetimlerle gösterilmiştir. Lojistik denkleminin gerçekleşmesi için analog davranışsal bir model geliştirilmiştir. Analog davranışsal model temel alınarak anahtarlama kapasitif tipte bir SPAD tümdevresi üzerinde lojistik denklemini gerçekleştirilmiştir. Devreden alınan ölçümlerde lojistik denkleminin faz portresi gözlemlenerek kaotik davranış doğrulanmıştır. SPAD tümdevrelerinin ayrıık zamanlı kaotik sistemlerin incelenmesinde ve kaotik işaret üretiminde kullanılabileceği gösterilmiştir.

## KAYNAKÇA

- [1] J. P. Eckmann ve D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Reviews of Modern Physics*, cilt 57, no. 3, ss. 617-656, 1985.
- [2] T. Addabbo, M. Alioto, A. Fort, S. Rocchi ve V. Vignoli, "Uniform-Distributed Noise Generator Based on a Chaotic Circuit," *Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 2006. IMTC 2006. Proceedings of the IEEE, ss. 1156-1160, 24-27 Nisan 2006
- [3] F. Pareschi, G. Setti, R. Rovatti ve G. Frattini, "A spread spectrum clock generator based on a short-term optimized chaotic map," *ESSCIRC (ESSCIRC)*, 2011 Proceedings of the , ss. 507-510, 12-16 Eylül 2011

- [4] W. Zhang ve D. He, "Chaotic secure communication based on discrete-time chaos noise generator," *Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies*, 2003. PDCAT'2003. Proceedings of the Fourth International Conference on , ss. 935- 939, 27-29 Ağustos 2003
- [5] M. Jessa, "Data encryption algorithms using one-dimensional chaotic maps," *Circuits and Systems*, 2000. Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on, cilt 1, ss. 711-714, 2000
- [6] İ. Çiçek, A. E. Pusane ve G. Dünder, "Tek boyutlu bir kaotik fonksiyonun gerçek rastsal sayı üretimine uygunluğunun incelenmesi," *Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı (SIU)*, ss. 1-4, 18-20 Nisan 2012
- [7] P. F. Verhulst, "Recherches sur la loi d'mathematics accroissement de la population.", *L'Académie Royale de Bruxelles et de l'Université Louvain*, cilt 18, ss. 1-42, 1845.
- [8] R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature*, cilt 261, no. 5560., ss. 459-467, 1976
- [9] A. Díaz-Méndez, J. V. Marquina-Pérez, M. Cruz-Irisson, R. Vázquez-Medina ve J. L. Del-Río-Correa, "Chaotic noise MOS generator based on logistic map," *Microelectron. J.* cilt 40, no. 3, ss. 638-640, Mart 2009
- [10] A. Cabrini, A. Carbonini, I. Galdi ve F. Maloberti, "A very fast and low-power time-discrete spread-spectrum signal generator," *Circuits and Systems, 2007. NEWCAS 2007. IEEE Northeast Workshop on*, ss. 1058-1061, 5-8 Ağustos 2007
- [11] Anadigm, "The AN231E04 dpASP Dynamically Reconfigurable Analog Signal Processor," AN231E04 Datasheet, Rev. 1.1